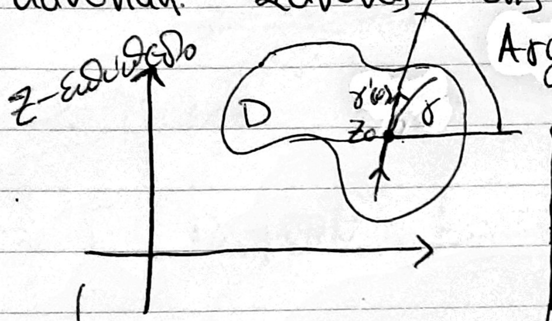
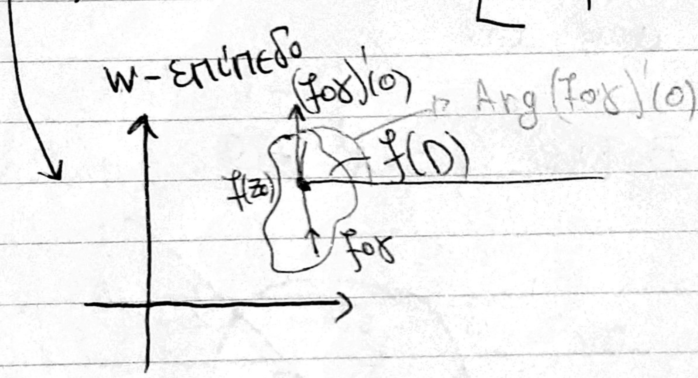
Μάθημα 16ο | 27/04/18

Συνέχεια (και τέλος) λίγων πραγμάτων για σύμμορφες απεικονίσεις (= συναρτήσεις)

Είδαμε χτες ότι αν $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, μιγαδικά διαφορίσιμη στο $z_0 \in D$ και $f'(z_0) \neq 0$ και $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset D$, $\varepsilon > 0$, με $\gamma(0) = z_0$ κανονική. Κανόνας της αλυσίδας: $(f\circ\gamma)'(0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\gamma'(0)}_{\neq 0} \neq 0$



$$\left[\begin{aligned} 0 \neq zw &= |z|e^{iArgz}\,|w|e^{iArgw} = \\ &= \underbrace{|z||w|}_{=|zw|}e^{i(Argz+Argw)} \Rightarrow arg(zw) = arg z + arg w \end{aligned}\right]$$



$$\Rightarrow \underbrace{arg(f\circ\gamma)'(0)}_{\text{γωνία του εφαπτ. διανύσματος στην } f\circ\gamma \text{ στο } t=0 \text{ με τον ημιάξονα Re}} = arg\, f'(z_0) + \underbrace{arg\,\gamma'(0)}_{\text{προσανατολισμένη γωνία του εφαπτόμενου διανύσματος } \gamma'(0) \text{ με τον ημιάξονα του πραγματικού.}}$$

$$\Rightarrow e^{i\,arg(f\circ\gamma)'(0)} = e^{iArg(f\circ\gamma)'(0)} = e^{iArg f'(z_0)}\, e^{iArg\gamma'(0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{\gamma(h)-\gamma(0)}{|\gamma(h)-\gamma(0)|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\gamma(h)-\gamma(0)}{h}}{\left|\frac{\gamma(h)-\gamma(0)}{h}\right|} = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = e^{iArg\gamma'(0)}$$

για κάθε καμπύλη με $\gamma'(0) \neq 0$

<u>τότε</u>

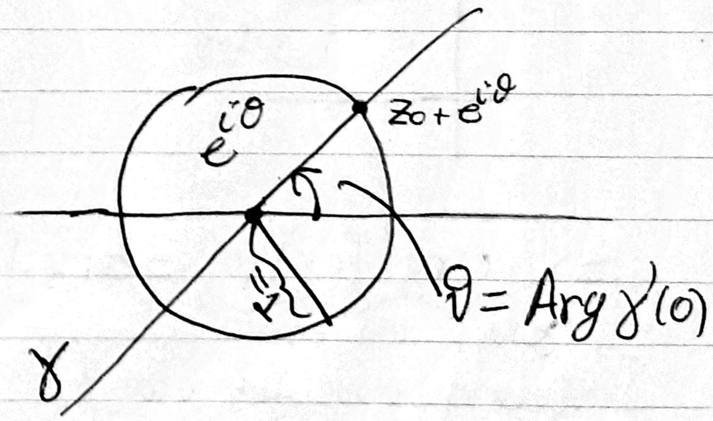
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)}{|(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)|}}{\dfrac{\gamma(h)-\gamma(0)}{|\gamma(h)-\gamma(0)|}} = \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)'(0)}{|(f\circ\gamma)'(0)|}}{\dfrac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|}} = e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}$$

Άρα, διαπιστώνουμε ότι για $f'(z_0)\neq 0$ και $\gamma'(0)\neq 0$, το όριο

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)}{|(f\circ\gamma)(h)-(f\circ\gamma)(0)|}}{\dfrac{\gamma(h)-\gamma(0)}{|\gamma(h)-\gamma(0)|}} = e^{i\operatorname{Arg} f'(z_0)}$$

δηλαδή, το όριο στα αριστερά υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την γ

$\Rightarrow$ <u>Ειδικά</u> για $\gamma(h) = z_0 + he^{i\vartheta}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$



$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{f(z_0+he^{i\vartheta})-f(z_0)}{|f(z_0+he^{i\vartheta})-f(z_0)|}\right)e^{-i\vartheta}$$

<u>δηλ.</u> διαπιστώνουμε ότι για τις ειδικές αυτές καμπύλες το όριο στα αριστερά υπάρχει και είναι ανεξάρτητο του ϑ τότε λέμε ότι: « η f διατηρεί τις γωνίες ».

Ισχύει και το αντίστροφο:

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0 με $\mathbb{R}$-παράγωγο $\neq 0$ και η f διατηρεί τις γωνίες στο z_0 $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ f μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 και $f'(z_0) \neq 0$

$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

$\mathbb{R}$-διαφορ. $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|)$

o μικρό όμικρον του $|z - z_0|$.

$\Longrightarrow$ Για $z(h) = z_0 + he^{i\theta}$ έχουμε:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(z_0 + he^{i\theta}) - f(z_0)}{|\lambda h e^{i\theta} + \mu h e^{-i\theta} + o(|h|)|} e^{-i\theta} = \frac{\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}}{|\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}|} e^{-i\theta} =$$

$$= \frac{\lambda + \mu e^{-i2\theta}}{|\lambda + \mu e^{-i2\theta}|}$$

Για να είναι αυτό ανεξάρτητο από το θ θα πρέπει $\mu = 0$

(βλ. σημ) και αφού λ και μ δεν είναι και τα 2 μηδέν $\Longrightarrow$ $\lambda \neq 0$ και $f'(z_0) = \lambda$ μιγ. διαφ.

Σύντομη Επανάληψη

f μιγ. διαφ. στο $z_0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}$ $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + o(|z - z_0|)$

και $f'(z_0) = \lambda$

f $\mathbb{R}$-διαφ. στο $z_0 \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \mu(\bar{z} - \bar{z}_0)$
$+ o(|z - z_0|)$

||

κτλ

$\binom{x}{y}$
$\updownarrow$
$z \mapsto \lambda z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$z \mapsto \lambda z + \mu \bar{z}$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Άρα f μιγ. διαφ στο z_0 με $f'(z_0) \neq 0$

$\iff$ f $\mathbb{R}$-διαφ στο z_0 με παράγωγο όχι μηδέν

$\iff \lambda \neq 0$ ή $\mu \neq 0$

και η f διατηρεί τις γωνίες στο z_0

Άρα: $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D$

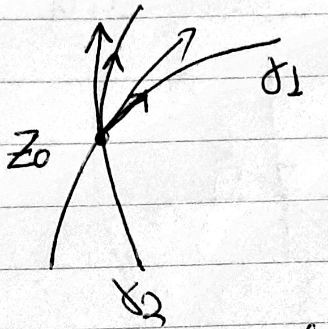
$\iff$: f σύμμορφη

[στη Γεωμετρία ενδεχομένως έχω διαφ. ορισμούς στον δικό μας εδώ η f διατηρεί και τον προσανατολισμό των γωνιών]

<u>Επεξήγηση</u>: <u>«διατηρεί τις γωνίες»</u>

Αν $\gamma_1 : (a_1, b_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : (a_2, b_2) \longrightarrow \mathbb{C}$

κανονικές με σημείο τομής το $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$



Η προσανατολισμένη κυρτή γωνία <u>από το</u> $\gamma_1'(t_1)$ <u>στο</u> $\gamma_2'(t_2)$

ορίζεται ως :

$$(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \operatorname{Arg} \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} = \theta$$

$$\gamma_2'(t_2) = |\gamma_2'(t_2)| e^{i \operatorname{Arg} \gamma_2'(t_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} = \frac{|\gamma_2'(t_2)|}{|\gamma_1'(t_1)|} e^{i(\operatorname{Arg} \gamma_2'(t_2) - \operatorname{Arg} \gamma_1'(t_1))}$$

και η f διατηρεί τις γωνίες στο $z_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\gamma_1, \gamma_2, z_0) = (f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0))}$$

$\Leftarrow$

$$\Leftrightarrow e^{i(\mathrm{Arg}\,\gamma_2'(t_2) - \mathrm{Arg}\,\gamma_1'(t_1))} = e^{i(\mathrm{Arg}(f\circ\gamma_2)'(t_2) - (f\circ\gamma_1)'(t_1))}$$

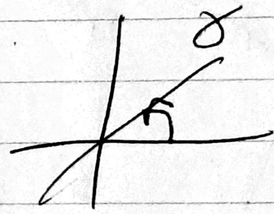
Για να διατηρούνται οι γωνίες απαραίτητα

$$\underline{f'(z_0) \neq 0}$$

Π.χ. $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \Rightarrow f'(0) = 0$

και έστω $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(0) = 0$ κανονική

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{\gamma(h)}{|\gamma(h)|} = \dots = e^{i\,\mathrm{Arg}\,\gamma'(0)}$$



αλλά $\displaystyle \lim_{h \to 0^+} \frac{(f\circ\gamma)(h)}{|(f\circ\gamma)(h)|} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\gamma^2(h)}{|\gamma^2(h)|} = e^{2i\,\mathrm{Arg}\,\gamma'(0)}$

Επίσης για να διατηρείται ο προσανατολισμός, απαραίτητα f μιγαδικά διαφ.

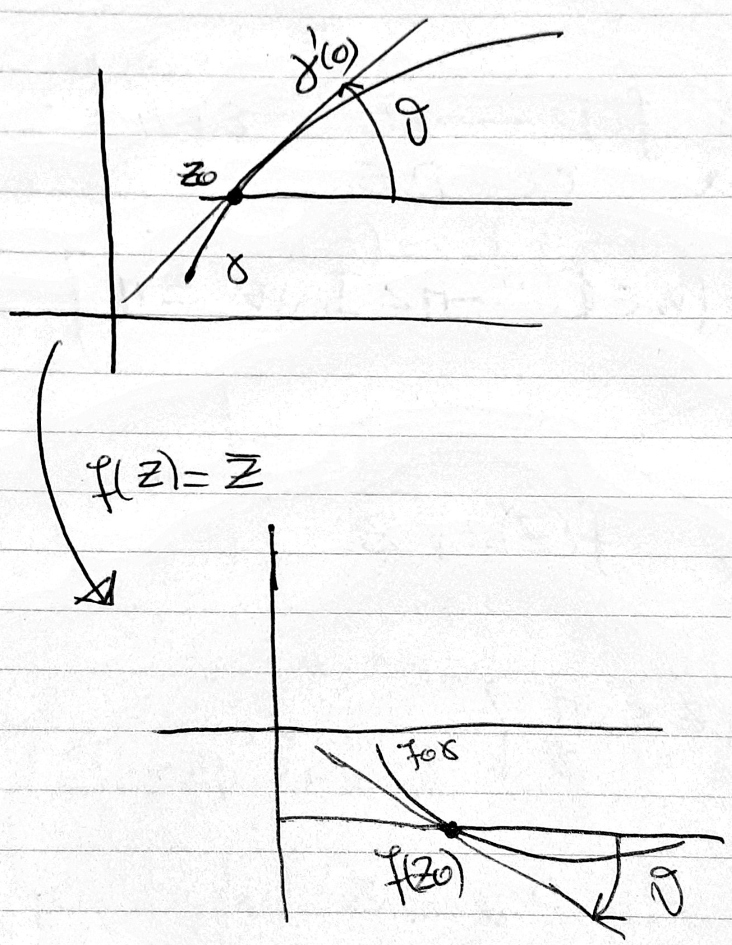
Π.χ. η $f(z) = \bar{z}$ είναι $\mathbb{R}$-διαφ. και

$f(z) = f(z_0) + \underset{\overset{\|}{\lambda}}{0} + \underset{\overset{\|}{\mu}}{1\bar{z}}$, δηλ. (αφού $\mu \neq 0$) <u>όχι μιγαδ. διαφ.</u>

και για $\gamma(h) = z_0 + he^{i\theta}$, δηλ. η γωνία της γ στο

z_0 είναι θ, $\dfrac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = e^{i\theta}$

ενώ $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(z_0+e^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0+e^{i\theta}) - f(z_0)|} = e^{-i\theta}$



ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο τόποι (δηλ. ανοικτά, συνεκτικά υποσύνολα) $D, E \subset \mathbb{C}$ ονομάζονται σύμμορφα ισοδύναμοι, αν $\exists\ f: D \longrightarrow E$ σύμμορφη, 1-1, και επί.

A) Δ.Ο. με την αντιστ. $f: D \longrightarrow E$ είναι σύμμορφα ισοδύναμα τα D, E.

$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, \pi]$, $E = \{ w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi \}$

$f = \log$.

$E = \{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0 \}$, $f(z) = \sqrt{z}$

$D = \{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3} \}$

$E = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

Οι πιο συνήθεις και βασικοί σύμμορφοι μετασχ.

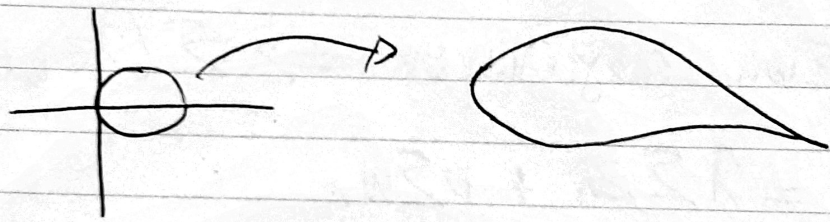
<u>μετασχηματισμός Mobius</u>: $M(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \gamma z + \delta = 0\}$

διατηρεί (ευθείες + κύκλους) $\longrightarrow$ (ευθείες + κύκλους)

<u>μετασχηματισμός Joukowski</u>

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$



§4: Αναλυτικές Συναρτήσεις

4.1 Σειρές (στο $\mathbb{C}$)

<u>Ορισμός</u>: Αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της z_n,

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ με $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$

ονομάζεται σειρά, $(S_n) =: \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

και αν $(S_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει, τότε

$\lim_{n\to\infty} S_n =: \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ και λέμε ότι η (S_n) <u>συγκλίνει απόλυτα</u>.

αν $\sum_{k=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$, δηλ. $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ συγκλίνει

<u>Πρόταση</u>: (1) $\sum z_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow z_n \longrightarrow 0$

$$\left[\begin{array}{l} S_n := \sum_{k=1}^{\infty} z_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S \in \mathbb{C} \Longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow S \\ \\ \xRightarrow[\text{ορίων}]{\text{αλγ}} \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{z_n} \longrightarrow 0 \end{array} \right]$$

(2) $\sum z_n$, $\sum w_n$ συγκλίνουν $\Longrightarrow \sum(\lambda z_n + w_n) =$

$$= \lambda \sum z_n + \mu \sum w_n$$

(3) $\underset{\text{συγκλίνει}}{\sum z_n} = \sum (x_n + i y_n) = \sum x_n + i \sum y_n$ συγκλίνει

$(\Longleftrightarrow)$ συγκλίνει

(4) $\sum |z_n| < +\infty \Longrightarrow \sum z_n$ συγκλίνει

[Αν η $a_n := |z_1| + \dots + |z_n|$ συγκλίνει

$\Longleftrightarrow (a_n)$ ακολουθία Cauchy

$$\Longrightarrow |S_{n+\ell} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+\ell} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+\ell} |z_k| = |a_{n+\ell} - a_n|$$

$$\forall n, \ell \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$$

$\Longrightarrow (S_n)$ ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$

$\underset{\mathbb{C} \text{ πλήρης}}{\Longrightarrow} \exists\, S \in \mathbb{C} : S_n \longrightarrow S$

<u>Παράδειγμα</u>: Η <u>γεωμετρική σειρά</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad z \in D(0,1)$$

συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα, δηλ. ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}, \quad z \in D(0,1)$$

ενώ για $z \geq 1$ δεν συγκλίνει